Taki Academy
www.takiacademy.com

Exercice 1 — 25 min — 4 pt

1) Calculer : $\int_0^2 \frac{dt}{(2+t)^2}$; $\int_0^2 \frac{dx}{\cos^2 x}$; $\int_0^2 \frac{2x}{\cos^2 x^2}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x\, dx$;

$\int_0^1 \frac{t}{(2+t^2)^2}dt$; $\int_0^{\pi} \frac{2\sin t}{(2+\cos t)^3}dt$; $\int_{-1}^0 \frac{t}{(t^2+1)^3}dt$; $\int_0^2 (1-|x-1|^3)dx$;

2) Calculer en intégrant par partie :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\sin t\, dt$; b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (4x+1).\cos x\, dx$; c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin 2x dx$

Exercice 2 — 25 min — 5 pt

On donne $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt$, $n \in IN^*$

1/ a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1 par une intégration par parties.

2/ En utilisant une intégration par parties, que pour tout n ∈ IN* on a : $I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos t\, dt$.

3/ a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$ on a :

$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$.

b) En déduire I_2 et I_3. Puis la valeur de l'intégrale J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2t+t^2-t^3)\sin t\, dt$

Exercice 3 — 25 min — 5 pt

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1°) Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

2°) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ alors f et g sont égales sur $[a,b]$.

3°) Pour tout x et t on a : $\int_0^1 t\,x^2 dt = \int_0^1 t\,x^2 dx$.

4°) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt$.

5°) $\int_{-1}^1 \frac{x^4 \sin x}{\sqrt{1+x^2}}dt = 0$.

6°) Si f est une fonction continue sur IR et périodique de période T alors $\int_0^{2T} f(t)dt = 2\int_0^T f(t)dt$.

www.takiacademy.com